Bonus

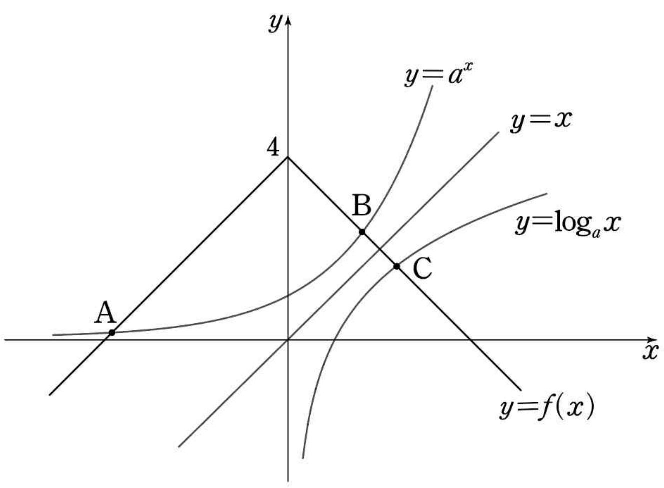
빠른 정답

번호	정답	번호	정답
1	④	6	③
2	④		
3	①		
4	61		
5	④		

01 정답 ④

정답풀이

함수 $f(x)$를 $f(x)=4-|x|$라 할 때, $y=f(x)$와 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=a^x$은 그림과 같이 세 점에서 만나고 x좌표가 작은 순서대로 $A(\alpha,\ f(\alpha))$, $B(\beta,\ f(\beta))$, $C(\gamma,\ f(\gamma))$라 합시다.



직선 $y=4-x$ 위에 있는 두 점 B, C는 서로 직선 $y=x$에 대칭이므로 $\beta+\gamma=4$입니다.
또한

$$p+q=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+4<\frac{1}{2}$$

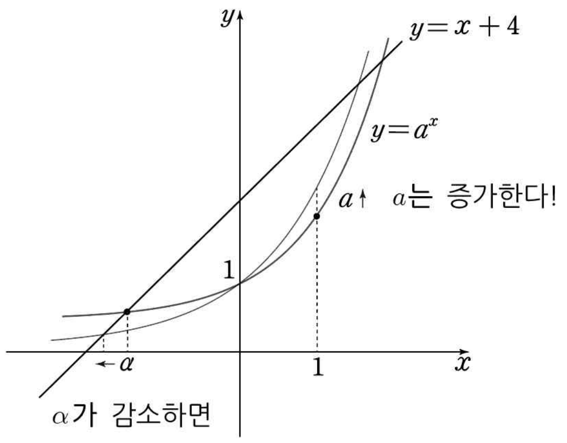
이므로 $\alpha<-\frac{7}{2}$입니다. … ㉠

점 A는 곡선 $y=a^x$와 직선 $y=4+x$의 교점이므로

$$4+\alpha=a^{\alpha},\ a=(4+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

가 성립합니다.

아래 [그림 1]과 같이 $a>1$에서 α가 감소하면 a가 증가합니다.



[그림 1]

따라서 $-4<x_1<x_2<0$인 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$(4+x_1)^{\frac{1}{x_1}}>(4+x_2)^{\frac{1}{x_2}}$$

이므로 $a=(4+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>\left(4-\frac{7}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{4}$입니다. ($\because$ ㉠)

02 정답 ④

정답풀이

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 $f(x)$의 차수를 n이라 하면, $g(x)=f(x)f'(x)$의 차수는 $2n-1$이므로 $g(x)$의 차수는 홀수입니다. $g(x)$의 차수가 3보다 크면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-x^{2n-1}+\cdots+8x^3}{x^{2n-1}}}{\dfrac{x^{2n-1}+\cdots-8x^3}{x^{2n-1}}}=-1$$

이므로 주어진 조건에 모순이고, $g(x)$의 차수가 3보다 작으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-x+8x^3}{8x^3}}{\dfrac{x-8x^3}{8x^3}}=-1$$

이므로 주어진 조건에 모순입니다. 그러므로 $g(x)$의 차수는 3입니다. 따라서 $f(x)$의 차수는 2입니다.

$g(x)-8x^3$ 을 삼차함수라고 가정하면, $g(-x)+8x^3$ 또한 삼차함수입니다. 그러므로 이 경우 위와 마찬가지로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(-x)+8x^3}{g(x)-8x^3}=-1$$

입니다. 따라서 $g(x)-8x^3$ 은 이차함수입니다. 그러므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라 하면, $k\times 2k=8$ 이므로 $k=2\,(k>0)$입니다. (참)

ㄴ. $g(0)=0$ 이므로

$$f(x)=2x^2+ax+b$$

에서 $a=0$ 또는 $b=0$ 이고, $a=0$ 이면 (가) 조건을 만족시키지 못하므로 $a\neq 0$ 입니다. (거짓)

ㄷ.
$f(x)=2x^2+ax$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x)+x &= \left(2x^2+ax\right)(4x+a)+x \\ &= x\left(8x^2+6ax+a^2+1\right) \end{aligned}$$

입니다. 방정식 $g(x)+x=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 방정식 $8x^2+6ax+a^2+1=0$ 은 중근을 갖습니다. 따라서

$$D_{/4}=(3a)^2-8a^2-8=0 \ \Rightarrow\ a=\pm 2\sqrt{2}$$

입니다. 그러므로 가능한 모든 $f\left(2\sqrt{2}\right)$의 곱은 $24\times 8=192$입니다. (참)

03 정답 ①

정답풀이

a_1, a_2 가 각각 홀수인지 짝수인지에 따라 수열의 패턴이 달라지므로

(1) a_1 과 a_2 가 모두 짝수인 경우
(2) a_1 은 짝수이고 a_2 는 홀수인 경우
(3) a_1 은 홀수이고 a_2 는 짝수인 경우
(4) a_1 과 a_2 가 모두 홀수인 경우

로 나누어 생각해봅시다.

(1) a_1 과 a_2 이 모두 짝수인 경우

a_1, a_2 가 짝수이면 a_1+a_2 도 짝수입니다. 따라서

$$a_3=\left|a_2-a_1\right| \text{ 에서 } a_3 \text{ 도 짝수}$$

입니다. 마찬가지로

a_2, a_3 이 짝수이므로 a_4 도 짝수,
a_3, a_4 가 짝수이므로 a_5 도 짝수

이므로 이 과정을 반복하면

"a_n 의 모든 항이 짝수여야"

합니다. 그런데 $a_5+a_{13}=25$ 이므로 모순입니다.

(2) a_1 은 짝수이고 a_2 는 홀수인 경우

n	1	2	3	4	5	6
a_n의 값	a_1	a_2	a_1+a_2	$\lvert a_2-a_3\rvert=\boxed{a_1}$	$a_3+a_4=2a_1+a_2$	$a_4+a_5=3a_1+a_2$
a_n 홀/짝	짝	홀	홀	짝	홀	홀
$a_{n+1}+a_n$ 홀/짝	홀	짝	홀	홀	짝	홀

형태의 유사성 발견

$3n-2$번째 항에서는 a_1

n	7	8	9	$\cdots$	13
a_n의 값	$\lvert a_5-a_6\rvert=\boxed{a_1}$	$a_6+a_7=4a_1+a_2$	$a_7+a_8=5a_1+a_2$	$\cdots$	$\boxed{a_1}$
a_n 홀/짝	짝	홀	홀	$\cdots$	짝
$a_{n+1}+a_n$ 홀/짝	홀	짝	홀	$\cdots$	홀

위 그림과 같이

$$a_5+a_{13}=2a_1+a_2+a_1=3a_1+a_2=25$$

이고 a_1 은 짝수, a_2 는 홀수인 자연수이므로 가능한 a_1, a_2 의 순서쌍 $\left(a_1,\ a_2\right)$는

$$(2,\ 19),\ (4,\ 13),\ (6,\ 7),\ (8,\ 1)$$

입니다. 따라서 $2a_1+a_2$ 로 가능한 값은 23, 21, 19, 17입니다.

(3) a_1 은 홀수이고 a_2 는 짝수인 경우

n	1	2	3	4	5	6
a_n의 값	a_1	a_2	a_1+a_2	$a_2+a_3=\boxed{a_1+2a_2}$	$\lvert a_3-a_4\rvert=a_2$	$a_4+a_5=a_1+3a_2$
a_n 홀/짝	홀	짝	홀	홀	짝	홀
$a_{n+1}+a_n$ 홀/짝	홀	홀	짝	홀	홀	짝

형태의 유사성 발견

n	7	8	$\cdots$	10	$\cdots$	13
a_n의 값	$a_5+a_6=\boxed{a_1+4a_2}$	$\lvert a_6-a_7\rvert=a_2$	$\cdots$	$\boxed{a_1+6a_2}$	$\cdots$	$\boxed{a_1+8a_2}$
a_n 홀/짝	홀	짝	$\cdots$	홀	$\cdots$	홀
$a_{n+1}+a_n$ 홀/짝	홀	홀	$\cdots$	홀	$\cdots$	홀

위 그림과 같이

$$a_5+a_{13}=a_2+a_1+8a_2=a_1+9a_2=25$$

이고 a_1 은 홀수, a_2 는 짝수인 자연수이므로 가능한 a_1, a_2

의 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$는

$$(7,\ 2)$$

입니다. 따라서 이 경우 $2a_1+a_2=16$입니다.

(4) a_1과 a_2이 모두 홀수인 경우

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	13
a_n의 값	a_1	a_2	$\lvert a_2-a_1\rvert$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
a_n 홀/짝	홀	홀	짝	홀	홀	$\cdots$	홀
$a_{n+1}+a_n$ 홀/짝	짝	홀	홀	짝	홀	$\cdots$	짝

위 그림과 같이 '홀, 홀, 짝'이 계속 반복되어 a_5, a_{13}이 모두 홀수이므로 $a_5+a_{13}=25$일 수 없습니다.

(1), (2), (3), (4)에 의하여 $2a_1+a_2$의 최댓값은 23이고 최솟값은 16입니다.

04 정답 61

정답풀이

방정식

$$\{f'(t)(x-t)+f(t)\}\times f(x)=0$$

의 실근은

$$\text{“}f'(t)(x-t)+f(t)=0 \text{ 또는 } f(x)=0\text{”} \cdots ①$$

을 만족하는 x입니다. 그러므로

"$f(x)=0$의 실근의 개수가 2 이상이면 t의 값에 관계없이 ①을 만족하는 x의 개수가 2 이상이므로 주어진 조건에 모순입니다."

또한, 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

이므로 방정식 $f(x)=0$는 적어도 하나의 실근을 가집니다.

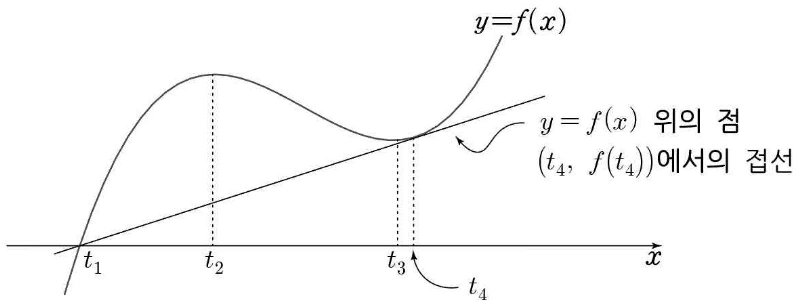
그러므로 ①의 실근의 개수가 1이기 위해서는

$f(x)=0$의 실근과 $f'(t)(x-t)+f(t)=0$의 실근이 겹치거나
$f'(t)(x-t)+f(t)=0$이 실근을 가지면 안됩니다.

아래와 같이 경우를 나누어 생각해봅시다.

1) 함수 $f(x)$가 극값을 가지는 경우

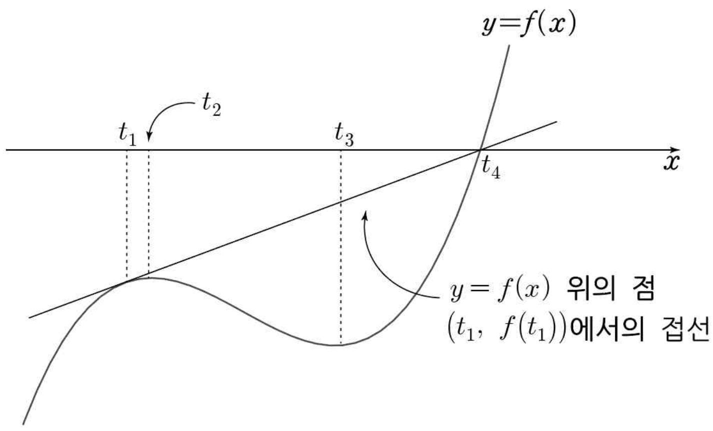
(극솟값)>0인 경우



①을 만족하는 t가 t_1, t_2, t_3, t_4로 4개입니다 (모순)

[그림 1]

(극댓값)<0인 경우



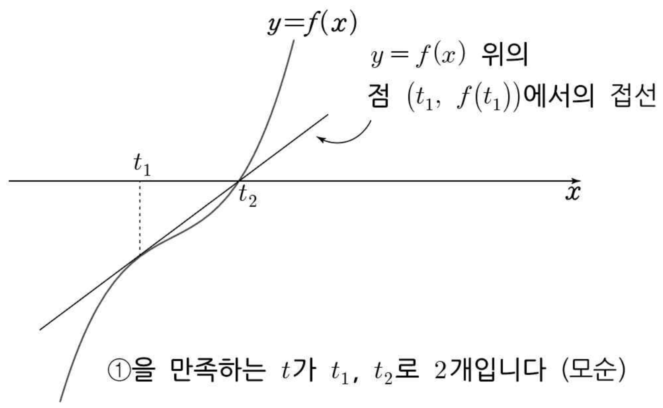
①을 만족하는 t가 t_1, t_2, t_3, t_4로 4개입니다 (모순)

[그림 2]

위 [그림 1], [그림 2]와 같이 ①을 만족하는 t의 개수가 4이므로 주어진 조건에 모순입니다.

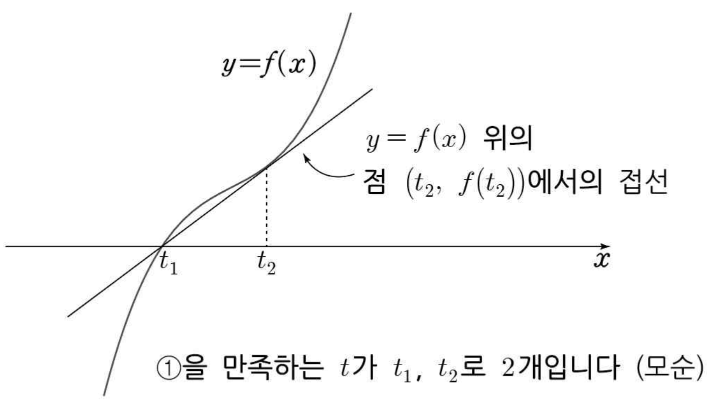
2) 함수 $f(x)$가 극값을 가지지 않는 경우

$f'(t)=0$인 t가 없는 경우 1



[그림 3]

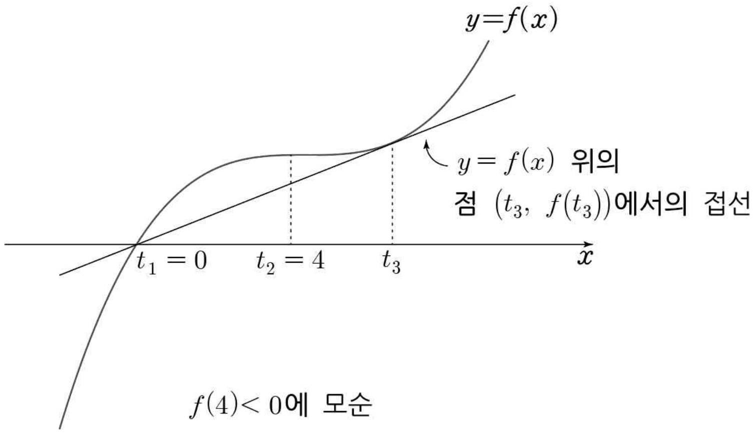
$f'(t)=0$인 t가 없는 경우 2



[그림 4]

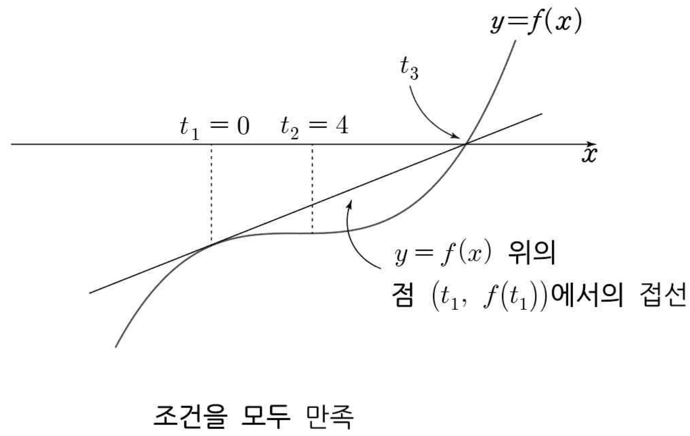
위 [그림 3], [그림 4]와 같이 곡선 $y=f(x)$가 기울기가 0인 접선을 가지지 않는 경우 ①을 만족하는 t의 개수가 2이므로 주어진 조건에 모순입니다.

$f'(t)=0$인 t가 존재하는 경우 1



[그림 5]

$f'(t)=0$인 t가 존재하는 경우 2



[그림 6]

[그림 5]의 경우 $f(4)<0$에 모순이고, 위 [그림 6]의 경우 주어진 조건을 모두 만족합니다.

그러므로 두 실수 m, k에 대하여

$$f(x)-m(x-a)=kx^2(x-a)$$

라 쓸 수 있습니다. 함수 $f'(x)$가 $x=4$에서 최솟값을 가지므로 $f'(x)$의 도함수를 $g(x)$라 하면

$$f'(x)=2kx(x-a)+kx^2+m$$
$$g(x)=6kx-2ak$$

에서 $a=12$입니다. $f'(4)=-64k+16k+m=0$이므로 $m=48k$입니다. 그러므로

$$f(x)=k(x-12)(x^2+48)$$

이고, $f(4)=-64$이므로 $f(4)=k\times64\times(-8)=-64$, $k=\dfrac{1}{8}$이고, $f(14)=61$입니다.

05 정답 ④

정답풀이

문제의 그림에서 점 O와 점 A를 이으면

$\angle\mathrm{OPB}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle\mathrm{BOA}=2\beta$입니다. 그러므로 원주각과 중심각의 관계에 의해
$\angle\mathrm{BCA}=\beta$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\pi-\alpha-\beta$,

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=-\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{8}$ 입니다.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\beta},\ \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=3\ \Rightarrow\ 3\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}$$

입니다. 해설의 편의를 위해 $\overline{\mathrm{BC}}=k$라 합시다.
코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle\mathrm{ABC})=-\frac{3}{8}=\frac{10k^2-64}{6k^2}=\frac{5k^2-32}{3k^2}$$
$$\Rightarrow 9k^2=-40k^2+256$$
$$\Rightarrow k^2=\frac{256}{49}$$
$$\Rightarrow k=\frac{16}{7}$$

입니다. 그러므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$8+\frac{16}{7}+\frac{3\times16}{7}=\frac{120}{7}$$

입니다.

06 정답 ③

정답풀이

두 함수 $F(x)$, $G(x)$를 각각

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx,\quad G(x)=\int_0^x g(x)dx$$

라 합시다.

ㄱ. $F(0)=G(0)$, $F(2)=G(2)$에서

$$F(0)-G(0)=0,\quad F(2)-G(2)=0$$

이므로 롤의 정리에 의하여

$$F'(a)-G'(a)=f(a)-g(a)=0$$

인 실수 a가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재합니다. (참)

ㄴ. 함수 $h(x)$가 $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)h(x)=g(x)\ \cdots\ ①,\quad h(x)\neq1\ \cdots\ ②$$

이므로 ㄱ.에서의 결과를 이용하여 ①에 $x=a$를 대입합시다. $f(a)=g(a)\neq0$이면

$$f(a)h(a)=g(a)$$

에서 $h(a)=\dfrac{f(a)}{g(a)}=1$이므로 ②에 모순입니다. 그러므로 $f(a)=g(a)=0$이므로 $f(b)=0$인 b가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재합니다. (참)

ㄷ. $k<1$인 실수 k에 대하여 함수 $h(x)$의 치역이

$$\{y\,|\,y<k\}$$

이므로 이는 $h(x)\neq1$을 함축합니다. 그러므로 ㄴ.에서 알아낸 정보를 활용할 수 있습니다. ㄱ.과 ㄴ.에 의해

$$f(c)=g(c)=0$$

인 실수 c가 존재합니다. 그러므로 실수 p에 대하여

$$f(x)=(x-c)(x-p),\quad g(x)=x-c$$

라 쓸 수 있습니다.

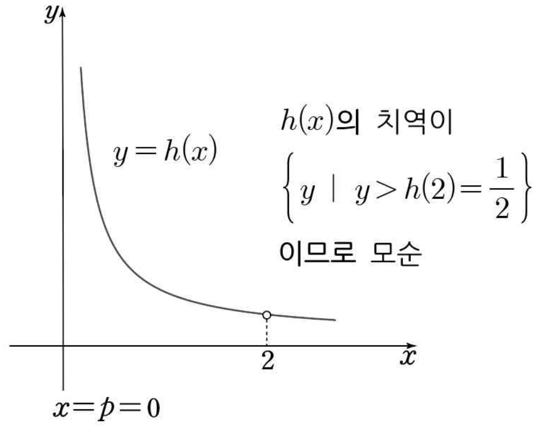
$$h(x)=\frac{1}{x-p}\quad(x\neq p)$$

입니다.

"$0<x<2$에서 함수 $h(x)$가 연속"

이므로 $0<p<2$인 경우는 제외됩니다. 그러므로 $p=0$, $p=2$, $p<0$, $p>2$의 네 가지 경우로 나누어 생각합시다.

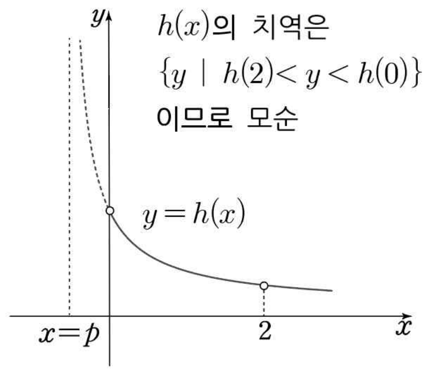
1) $p=0$인 경우



[그림 1]

위 [그림 1]과 같이 $k<1$인 실수 k에 대하여 함수 $h(x)$의 치역이 $\{y|y<k\}$임에 모순입니다.

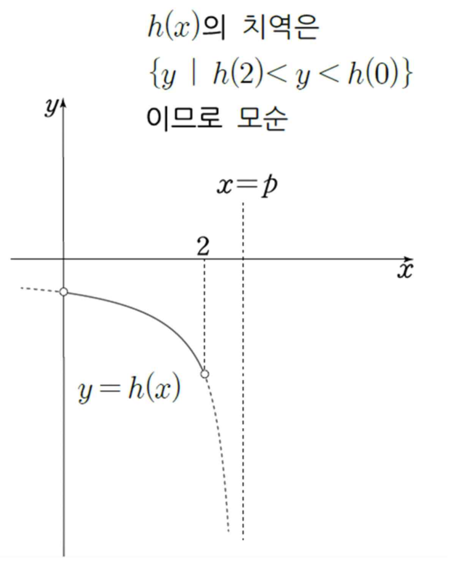
2) $p<0$인 경우



[그림 2]

위 [그림 2]와 같이 $k<1$인 실수 k에 대하여 함수 $h(x)$의 치역이 $\{y|y<k\}$임에 모순입니다.

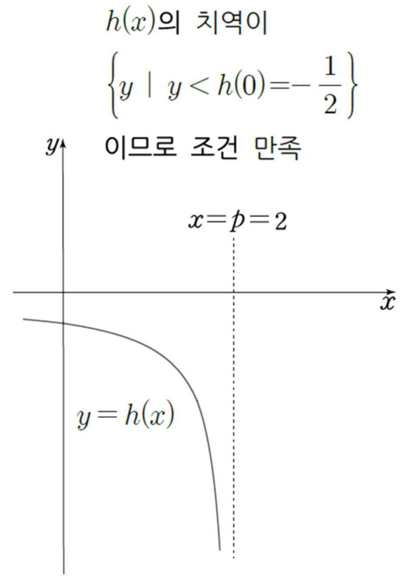
3) $p>2$인 경우



[그림 3]

위 [그림 3]과 같이 $k<1$인 실수 k에 대하여 함수 $h(x)$의 치역이 $\{y|y<k\}$임에 모순입니다.

4) $p=2$인 경우



[그림 4]

위 [그림 4]와 같이 주어진 조건을 만족함을 알 수 있고, 이때 $k=-\frac{1}{2}$입니다.

그러므로 $f(x)=(x-c)(x-2)$이고, $g(x)=(x-c)$에서

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 g(x)dx,\ \int_0^2\{f(x)-g(x)\}=0,$$
$$\int_0^2 (x-c)(x-3)dx=0$$

에서 $\frac{8}{3}-2(c+3)+6c=0$, $c=\frac{5}{6}$입니다. 그러므로

$$f(k)+g(k)=f\left(-\frac{1}{2}\right)+g\left(-\frac{1}{2}\right)=2$$

입니다. (거짓)