

2026학년도 시대인재BOOKS × VERADI 수능 직전 모의고사
수학 영역 해설지

공통과목 정답

01	02	03	04	05	06	07	08
②	③	④	④	①	⑤	①	③
2점	2점	3점	3점	3점	3점	3점	3점
9	10	11	12	13	14	15	16
④	②	④	①	②	⑤	⑤	8
4점	4점	4점	4점	4점	4점	4점	3점
17	18	19	20	21	22		
4	9	5	33	4	68		
3점	3점	3점	4점	4점	4점		

선택과목(확률과 통계) 정답

23	24	25	26	27	28	29	30
⑤	②	①	③	④	⑤	240	99
2점	3점	3점	3점	3점	4점	4점	4점

선택과목(미적분) 정답

23	24	25	26	27	28	29	30
③	②	①	③	①	⑤	25	257
2점	3점	3점	3점	3점	4점	4점	4점

공통과목 해설

01

②

풀이

$$4^{\sqrt{3}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sqrt{3}+1} = 2^{2\sqrt{3}-2} \times 2^{-2\sqrt{3}-1} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

02

③

풀이

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$$

이고

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$$

이므로 구하는 값은

$$f'(1) = 3$$

이다.

03

④

풀이

$$a_2 a_4 = (a_3)^2 = 8$$

이고 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$a_3 = 2\sqrt{2}$$

이다. 이때 $a_5 = 4$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$2\sqrt{2}r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = \sqrt{2}$$

이다.

$$\therefore a_1 = \frac{a_3}{r^2} = 2$$

04

④

풀이

$f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속

$$\Rightarrow 3a-1 = |6-a|$$

에서 위 식의 우변이 항상 0 이상이므로 $a \geq \frac{1}{3}$ 이어야 한다.

따라서

$$3a-1 = a-6 \text{ 또는 } 3a-1 = 6-a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } a = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{7}{4} \quad (\because a \geq \frac{1}{3})$$

이다.

05

①

풀이

$$f(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - x + 4)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (3x^2 + 2)(x^2 - x + 4) + (x^3 + 2x)(2x - 1)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 23$$

06

⑤

풀이

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

이다. 즉,

$$\cos\theta < 0 \text{ 이고 } \tan\theta > 0 \Rightarrow \theta \text{는 제3사분면의 각}$$

이다. 따라서

$$\cos\theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이다.

07

①

풀이

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x) + x^3 - 2x^2$$

예 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

이고, 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 3x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x + 4$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + k \quad (k \text{는 상수})$$

이다. 이때 $f(1)=1$ 이므로

$$k = -\frac{3}{2}$$

이다.

$$\therefore f(0) = k = -\frac{3}{2}$$

08

③

풀이

$$\log_a b^4 = \log_b a$$

$$\Rightarrow 4\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\Rightarrow (\log_a b)^2 = \frac{1}{4}, \log_a b = \frac{1}{2} \quad (\because a > 1, b > 1)$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a}$$

이고,

$$\log_2(2a+b) - \log_4 a = 2$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{2a+b}{\sqrt{a}} = 2$$

$$\Rightarrow \log_2(2\sqrt{a}+1) = 2 \quad (\because b = \sqrt{a})$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = b = \frac{3}{2}, a = \frac{9}{4}$$

이다.

$$\therefore a+b = \frac{15}{4}$$

09

④

풀이

시각 $t(t \geq 0)$ 에서 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면 $t=0$ 일 때, 점 P의 위치가 1이므로

$$x(t) = 1 + \int_0^t v(s)ds$$

이다. 주어진 조건에서 $x(1)=0$ 이므로

$$1 + \int_0^1 v(s)ds = 0 \Rightarrow 1 + \left[s^3 + \frac{a}{2}s^2 - as \right]_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 4$$

이다.

10

②

풀이

조건 (가)에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \sqrt{5} : 3$$

이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{5}x, \overline{AB} = 3x$$

라 하자. 조건 (나)에서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos A = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\because \angle BAC < \frac{\pi}{2})$$

이다. 따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$16 = 5x^2 + 9x^2 - 2 \times \sqrt{5}x \times 3x \times \cos A$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}$$

임을 알 수 있으므로

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = 6$$

이다.

11

④

풀이

점 P의 x 좌표를 k 라 하자.

원점 O에 대하여

$$(\text{삼각형 OPQ의 넓이}) = \frac{1}{2} \times a \times k$$

이므로 곡선 $y=f(x)(x \geq 0)$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 직선 PQ에 의하여 이등분 되려면

$$\int_0^k f(x)dx = 2 \times (\text{삼각형 OPQ의 넓이})$$

이어야 한다. 따라서

$$\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^3 + x^2 + ax \right]_0^k = ak$$

$$\Rightarrow -\frac{k^4}{4} - \frac{3}{4}k^3 + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow k^2(k+4)(k-1) = 0, k=1 \quad (\because k > 0)$$

이므로

$$f(k) = f(1) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

이다.

12

①

풀이

a_1 의 값에 따라 경우를 나누어 보자.

(i) $|a_1|$ 이 홀수인 경우

주어진 규칙에 의하여 $a_2 = -a_1 + 3$ 이므로 $|a_2|$ 는 0 또는 짝수이다.

같은 방식으로

$$a_3 = a_2 + 3 = -a_1 + 6, a_4 = -a_3 + 3 = a_1 - 3,$$

$$a_5 = a_4 + 3 = a_1, \dots$$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = a_{n+4}$ 이고,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 6$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = 7(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2) = 45$$

이므로 이 경우 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $|a_1|$ 이 0 또는 짝수인 경우

(i)과 마찬가지로

$$a_2 = a_1 + 3, a_3 = -a_2 + 3 = -a_1, a_4 = a_3 + 3 = -a_1 + 3,$$

$$a_5 = -a_4 + 3 = a_1, \dots$$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = a_{n+4}$ 이고,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 6$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = 7(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2) = 45 + 2a_1$$

이므로

$$50 < 45 + 2a_1 < 60 \Rightarrow \frac{5}{2} < a_1 < \frac{15}{2}$$

이어야 하고, $|a_1|$ 이 짝수이므로 가능한 a_1 의 값은 4, 6뿐이다.

$\therefore$ (구하는 값) = $4 + 6 = 10$

13

②

풀이

$$h(x) = x|g(x)|$$

라 하면 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = f(a) = 0 \quad (\because h(0) = 0)$$

이다. 이때, 모든 실수 x 에 대하여 $|g(x)| \geq 0$ 이므로

$$x \geq 0 \text{에서 } h(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \text{에서 } f(x) \geq 0,$$

$$x < 0 \text{에서 } h(x) \leq 0 \Rightarrow x < 0 \text{에서 } -f(x+a) \leq 0$$

$$\Rightarrow x < a \text{에서 } f(x) \geq 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이고,

$$f(x) = px^2(x-a)^2 \quad (p > 0)$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$|g(x)| = \begin{cases} -px(x+a)^2 & (x < 0) \\ px(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에서 (나)에 의하여 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서만 최솟값을 가지려면

$$g(x) = \begin{cases} -px(x+a)^2 & (x < 0) \\ -px(x-a)^2 & (0 \leq x < a) \\ px(x-a)^2 & (x \geq a) \end{cases}$$

이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -p(x-a)^2 - 2px(x-a) \quad (0 \leq x < a) \\ &= -p(x-a)(3x-a) \end{aligned}$$

에서 (나)에 의하여

$$a = 3$$

이고,

$$g(1) = -12 \Rightarrow p = 3$$

임을 알 수 있다.

$$\therefore g(-4) + g(2) = 12 - 6 = 6$$

14

⑤

풀이

(나)에서

$$a_p + a_q = \sum_{k=1}^7 a_k$$

을 만족시키는 p, q 의 순서쌍 (p, q) 의 개수가 6이므로 가능한 경우는 다음 두 가지뿐이다.

$$\textcircled{1} \quad a_1 + a_{12} = a_2 + a_{11} = \cdots = a_6 + a_7 = \sum_{k=1}^7 a_k,$$

$$\textcircled{2} \quad a_1 + a_{13} = a_2 + a_{12} = \cdots = a_6 + a_8 = \sum_{k=1}^7 a_k$$

이때 $\textcircled{1}$ 의 경우,

$$\begin{aligned} a_6 + a_7 &= \sum_{k=1}^7 a_k \Rightarrow \sum_{k=1}^5 a_k = 0 \\ &\Rightarrow \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 0 \\ &\Rightarrow a_3 = 0 \end{aligned}$$

이므로 (가)를 만족시킬 수 없다,

$\textcircled{2}$ 의 경우,

$$\begin{aligned} a_6 + a_8 &= \sum_{k=1}^7 a_k \Rightarrow 2a_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} \\ &\Rightarrow 7a_1 = -3a_7 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$7a_1 = -3(a_1 + 6d) \Rightarrow a_1 = -\frac{9}{5}d$$

이고 $a_1 > 0$ 이므로 $d < 0$ 이다. 따라서

$$a_2 = -\frac{4}{5}d, \quad a_3 = \frac{1}{5}d, \quad \cdots$$

이므로 $|a_n|$ 의 최솟값은 $|a_3|$ 이다.

즉,

$$-\frac{1}{5}d = 3 \Rightarrow d = -15$$

이므로

$$a_2 = 12$$

이다.

15

⑤

풀이

함수 $F(x)$ 를 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 라 하면

$$F(0) = 0, \quad F'(x) = f(x)$$

이고, 점 $(k, F(k))$ 에서 곡선 $y = F(x)$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = F'(k)(x - k) + F(k)$$

이다. 위 직선이 직선 $y = x$ 와 만나지 않으려면 다음 두 조건을 모두 만족시켜야 한다.

$$\textcircled{1} \quad F'(k) = 1 \quad \textcircled{2} \quad -kF'(k) + F(k) \neq 0 \Rightarrow F(k) \neq k \quad (\because \textcircled{1})$$

이때 주어진 조건에서

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{과 } \textcircled{2} \text{를 모두 만족시키는 실수 } k \text{의 값이 2뿐임 } \cdots \textcircled{1} \\ \Rightarrow F'(2) = 1, \quad F(2) \neq 2 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

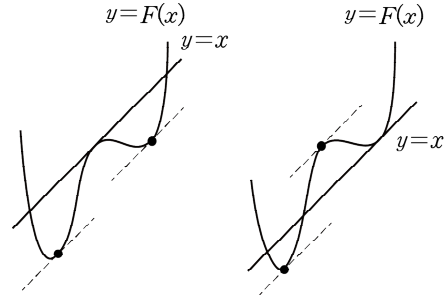
조건에서 $f(3) = F'(3) = 0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $f(p) = F'(p) = 1$ 인 실수 $p(p > 3)$ 이 적어도 하나 존재한다.

이 경우 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $F(p) = p$ 이어야 하고, 곡선 $y = F(x)$ 와 직선 $y = x$ 는 점 (p, p) 에서 접함을 알 수 있다. 따라서 두 실수 $m(m > 0), q$ 에 대하여

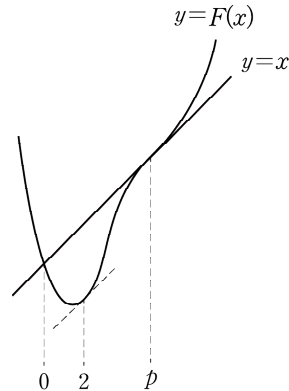
$$F(x) = mx(x-p)^2(x-q) + x$$

로 놓을 수 있다.

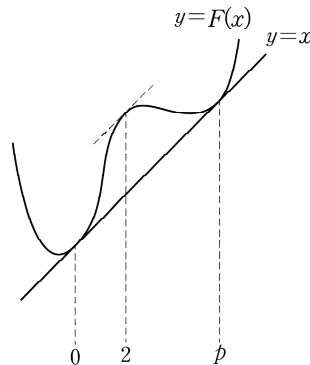
이때 $q \neq 0$ 또는 $q \neq p$ 이면 곡선 $y = F(x)$ 와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 세 점에서 만난다. 이 경우 다음 그림과 같이 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 동시에 만족시키는 점 $(k, F(k))$ 의 개수가 2이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 못한다.



따라서 $q = 0$ 이거나 $q = p$ 이어야 한다. $q = p$ 인 경우 함수 $y = F(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $F'(3) = 0$ 을 만족시킬 수 없다.



따라서 $q = 0$ 이므로 함수 $y = F(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y = x$ 와 두 점 $(0, 0), (p, p)$ 에서 접한다.



따라서

$$F(x) = mx^2(x-p)^2 + x \Rightarrow p = 4 \quad (\because \text{대칭성})$$

이고,

$$F'(x) = 2mx(x-4)^2 + 2mx^2(x-4) + 1$$

에서

$$F'(3) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{12}$$

임을 알 수 있다.

이상에서

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{6}x(x-4)^2 + \frac{1}{6}x^2(x-4) + 1$$

이므로

$$f(5) = 6$$

이다.

16

8

풀이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m k^2 &= 63 + \sum_{k=1}^{m+1} (k^2 - 2m) \\ \Rightarrow -63 &= \sum_{k=1}^{m+1} k^2 - \sum_{k=1}^m k^2 - 2 \sum_{k=1}^{m+1} m \\ \Rightarrow -63 &= (m+1)^2 - 2m(m+1) \\ \Rightarrow m^2 &= 64, m=8\end{aligned}$$

이다.

17

4

풀이

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x + 1 \\ \Rightarrow f(x) &= x^3 - 3x^2 + x + 1 \quad (\because f(0)=1) \\ \Rightarrow f(3) &= 4\end{aligned}$$

18

9

풀이

$$\begin{aligned}4a \text{의 네제곱근 중 실수인 것} &\Rightarrow \sqrt[4]{4a}, -\sqrt[4]{4a} \\ \text{이므로 이 두 값의 곱은 } &-\sqrt{4a} \text{이다. 이때 이 값이 } 3-a \text{이므로} \\ -\sqrt{4a} &= 3-a \Rightarrow a-2\sqrt{a}-3=0 \\ &\Rightarrow (\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+1)=0 \\ &\Rightarrow \sqrt{a}=3, a=9\end{aligned}$$

이다.

19

5

풀이

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \\ \text{이므로} & \\ \text{함수 } f(x) \text{는 } x=2 \text{에서 극솟값 } k-4 & \\ \text{를 갖는다.} & \\ \text{이때,} & \\ \text{함수 } 3-2f(x-1) \text{의 도함수는 } -2f'(x-1) & \\ \text{이므로} & \\ \text{함수 } 3-2f(x-1) \text{는 } x=3 \text{에서 극댓값 } 3-2(k-4) & \\ \text{를 갖는다. 따라서 조건에 의하여} & \\ k-4 &= 3-2(k-4) \Rightarrow k=5 \\ \text{임을 알 수 있다.} &\end{aligned}$$

20

33

풀이

두 점 A, C의 y 좌표의 합이 0이므로 직선 AC가 x 축과 만나는 점은 선분 AC의 중점이다. 마찬가지로, 직선 BD가 x 축과 만나는 점 또한 선분 BD의 중점이다.
즉, 두 직선 AC, BD가 x 축 위의 점에서 만나기 위해서는 두 선분 AC, BD의 중점의 x 좌표가 서로 같아야 함을 알 수 있다. 이때 네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$$A(a^k, k), B((2a)^k, k), C(a^{-k}, -k), D((2a)^{-k}, -k)$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{a^k + a^{-k}}{2} &= \frac{(2a)^k + (2a)^{-k}}{2} \\ \Rightarrow (2^k - 1)a^k &= (1 - 2^{-k})a^{-k} \\ \Rightarrow (2^k - 1)a^k &= (2^k - 1)(2a)^{-k} \\ \Rightarrow a^k &= (2a)^{-k} \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2a}, a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

따라서 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형임을 알 수 있으므로 이 사각형의 넓이는

$$2k \times (\sqrt{2^k} - \sqrt{2^{-k}})$$

이다. 조건에서 이 값이 $\frac{15}{2}k$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{2^k} - \sqrt{2^{-k}} &= \frac{15}{4} \\ \Rightarrow t - \frac{1}{t} &= \frac{15}{4} \quad (\because \sqrt{2^k} = t \text{로 치환}) \\ \Rightarrow (4t+1)(t-4) &= 0, t=4 \quad (\because t > 0) \\ \Rightarrow 2^k &= 16 = 2^4, k=4\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

$$\therefore 2(a^2 + k^2) = 2\left(\frac{1}{2} + 16\right) = 33$$

풀이

$f(x)$ 가 삼차함수이므로 $f(x)=0$ 인 실수 x 가 적어도 하나 존재한다.
 $f(\alpha)=0$ 인 실수 α 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)-g(x)}{(f(x))^2} \text{의 값이 존재함}$$

$$\Rightarrow f(\alpha)-g(\alpha)=0$$

$$\Rightarrow \alpha=1 \text{ 또는 } \alpha=2 \quad (\because f(\alpha)=0)$$

임을 알 수 있다.

(i) $\alpha=1$ 인 경우

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $p(x)$ 에 대하여

$$f(x)=(x-1)p(x)$$

로 놓을 수 있고, 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)p(x)-(x-2)}{(x-1)^2(p(x))^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)-(x-2)}{(x-1)(p(x))^2} \dots \textcircled{1}$$

의 값이 존재해야 한다. 즉, $a=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{p(x)-(x-2)}{(x-1)(p(x))^2} \text{의 값이 존재함} \Rightarrow p(1)=-1$$

이어야 하는데

$$p(1)<0 \Rightarrow p(x)=0 \text{의 실근의 개수가 } 2$$

이므로 $p(a)=0$ 인 실수 a 에 대하여 $\textcircled{1}$ 의 값이 존재하지 않음을 알 수 있다.
 따라서 조건에 모순이다.

(ii) $\alpha=2$ 인 경우

(i)과 마찬가지로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $q(x)$ 에 대하여

$$f(x)=(x-2)q(x)$$

로 놓을 수 있고, 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-2)q(x)-(x-1)}{(x-2)^2(q(x))^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)-(x-1)}{(x-2)(q(x))^2} \dots \textcircled{2}$$

의 값이 존재해야 한다. 즉, $a=2$ 일 때, $\textcircled{2}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{q(x)-(x-1)}{(x-2)(q(x))^2} \text{의 값이 존재함} \Rightarrow q(2)=1$$

이므로

$$q(x)=x^2+bx-2b-3$$

으로 놓을 수 있다. 또한 $\textcircled{2}$ 에서

$$\text{방정식 } q(x)=0 \text{의 실근이 존재하지 않아야 함}$$

을 알 수 있으므로

$$\text{판별식} \Rightarrow b^2-4(-2b-3)<0 \Rightarrow -6<b<-2$$

이어야 한다. 따라서 $f(0)$ 은 정수인데,

$$f(0)=-2q(0)=4b+6 \Rightarrow -18<f(0)<-2$$

이고,

$$f(0)=-17 \text{이 되도록 하는 실수 } b \text{의 값은 } -\frac{23}{4},$$

$$f(0)=-3 \text{이 되도록 하는 실수 } b \text{의 값은 } -\frac{9}{4}$$

이므로

$$f(3)=q(3)=b+6$$

$$\Rightarrow f(3) \text{의 최댓값과 최솟값은 각각 } \frac{15}{4}, \frac{1}{4}$$

임을 알 수 있다.

$$\therefore (\text{구하는 값}) = \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = 4$$

풀이

함수 $f(x)$ 의 그래프를 평행이동하여 함수 $g(x)$ 의 그래프와 일치하게 할 수 있다. 이때

$$g(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)-7a,$$

$$g(x)=f\left(x-\frac{3a}{2}\right)-7a,$$

$$g(x)=f\left(x-\frac{7a}{2}\right)-7a,$$

$\vdots$

인데, $g(x)=f\left(x-\frac{7a}{2}\right)-7a$ 에서 함수 $g(x)$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{7a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-7a$ 만큼 평행이동시킨

그래프임을 알 수 있다.

즉,

$$\frac{-7a}{\frac{7a}{2}} = -2$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 점을 x 축의 방향으로 $\frac{7a}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 $-7a$ 만큼 평행이동시킨 점이 함수 $g(x)$ 의 그래프 위의 점이고, 이 두 점을 지나는 직선의 기울기가 -2 이다.

따라서 기울기가 -2 인 직선 l 과 곡선 $y=g(x)$ 와 세 점에서만 만나므로 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 또한 세 점에서만 만난다.

이때, 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점을 B라 하면

$$\text{점 A를 } x \text{축의 방향으로 } \frac{7a}{2} \text{만큼, } y \text{축의 방향으로 } -7a \text{만큼}$$

평행이동시킨 점이 P

이고,

$$\text{점 B를 } x \text{축의 방향으로 } \frac{7a}{2} \text{만큼, } y \text{축의 방향으로 } -7a \text{만큼}$$

평행이동시킨 점이 Q

이다. 따라서

$$\overline{AP} = \frac{7a}{2} \sqrt{5} \Rightarrow (\text{점 P의 } x \text{좌표}) = 4a \quad (\because (7a))$$

$$\Rightarrow (\text{점 A의 } x \text{좌표}) = \frac{a}{2}$$

이고 (나)에서

$$(\text{점 P의 } y \text{좌표}) - (\text{점 Q의 } y \text{좌표}) = 3$$

$$\Rightarrow (\text{점 A의 } y \text{좌표}) - (\text{점 B의 } y \text{좌표}) = 3$$

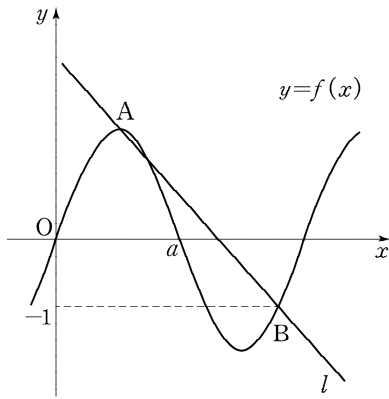
$$\Rightarrow (\text{점 B의 } y \text{좌표}) = -1 \quad (\because f\left(\frac{a}{2}\right) = 2)$$

임을 알 수 있다.

이때, 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 가 $0 < x < a$ 에서 두 점과 y 좌표가 -1 인 점 B에서만 만나야 하므로

$$\text{가능한 점 B의 좌표는 } \left(\frac{11}{6}a, -1\right) \text{ 뿐임}$$

을 알 수 있다.



즉,

(직선 AB의 기울기)=(직선 l의 기울기)

$$\Rightarrow \frac{-1-2}{\frac{11}{6}-\frac{a}{2}} = -2, \quad a = \frac{9}{8}$$

이고, 직선 l의 방정식은 $y = -2\left(x - \frac{a}{2}\right) + 2$ 에서

$$k = a + 2 = \frac{25}{8}$$

이다.

$$\therefore 16(a+k) = 16\left(\frac{9}{8} + \frac{25}{8}\right) = 68$$

선택과목(확률과 통계) 해설

23

⑤

풀이

구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

이다.

24

②

풀이

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 상수항의 계수를 a , x^{-2} 의 계수를 b 라 하면

$$\left((2x^2+1)\left(x + \frac{1}{x}\right)^4\right) \text{의 전개식에서 상수항} = 1 \times a + 2 \times b$$

이다. 이때,

$$a = {}_4C_2 = 6, \quad b = {}_4C_3 = 4$$

이므로

$$(\text{구하는 값}) = 6 + 8 = 14$$

이다.

25

①

풀이

주어진 모집단에서 크기가 196인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\bar{x}$ 라 하자. 이 표본평균을 이용하여 구한 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{196}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{196}}$$

이다. 즉, 조건에 의하여

$$a - 4.72 = 2 \times 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{196}} = 2 \times \frac{49}{25} \times \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow a = 5.28$$

임을 알 수 있다.

26

③

풀이

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 원소의 개수가 2인 부분집합 10개 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 선택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

이다. 이때, 선택한 두 부분집합의 교집합이 공집합이 아니려면 두 부분집합의 교집합의 원소의 개수가 1이어야 한다.

즉, 두 부분집합의 교집합의 원소를 선택하는 경우의 수는 5,

두 부분집합 교집합의 원소가 아닌 두 부분집합의 원소를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$ 이므로

$$(\text{구하는 확률}) = \frac{5 \times {}_4C_2}{45} = \frac{2}{3}$$

이다.

27

④

풀이

구하는 경우의 수는

A를 포함한 5명의 학생이 탁자에 둘러앉는 경우 ... ㉠

의 수에서

A가 여학생과 이웃하지 않는 경우 ... ㉡

의 수를 빼서 구할 수 있다.

㉠의 경우, A를 제외한 7명의 학생 중에서 4명을 선택하고, 선택한 5명의 학생 모두가 탁자에 둘러앉으면 되므로

$$(㉠\text{을 만족시키는 경우의 수}) = {}_7C_4 \times (5-1)! = 840$$

이다.

㉡의 경우를 만족시키려면 A를 포함하여 5명의 학생 중에서

① (남학생 4명, 여학생 1명) ② (남학생 3명, 여학생 2명)

을 선택해야 한다.

이때, ①의 경우가 되도록 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_3 \times {}_4C_1$,

학생 A를 탁자에 앉히는 경우의 수는 1,

여학생 1명을 학생 A와 이웃하지 않게 탁자에 앉히는 경우의 수는 2,

나머지 학생을 남은 자리에 앉히는 경우의 수는 3!이므로

$$(㉠\text{의 경우의 수}) = {}_3C_3 \times {}_4C_1 \times 1 \times 2 \times 3! = 48$$

이다.

또한, ②의 경우가 되도록 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2$,

학생 A를 탁자에 앉히는 경우의 수는 1,

여학생 2명을 학생 A와 이웃하지 않게 탁자에 앉히는 경우의 수는 2!,

나머지 학생을 남은 자리에 앉히는 경우의 수는 2!이므로

$$(㉡\text{의 경우의 수}) = {}_3C_2 \times {}_4C_2 \times 1 \times 2! \times 2! = 72$$

이다.

따라서

$$(㉡\text{을 만족시키는 경우의 수}) = 48 + 72 = 120$$

이므로

$$(구하는 경우의 수) = 840 - 120 = 720$$

이다.

28

⑤

풀이

$\overline{X}$ 로 가능한 값은

$$\frac{1+1+1+1+1}{5} = 1, \quad \frac{1+1+1+1+6}{5} = 2,$$

$$\frac{1+1+1+6+6}{5} = 3, \quad \frac{1+1+6+6+6}{5} = 4,$$

$$\frac{1+6+6+6+6}{5} = 5, \quad \frac{6+6+6+6+6}{5} = 6$$

이므로 조건에서

$$P(2 < \overline{X} < 5) = \frac{32}{125} \Rightarrow P(\overline{X}=3) + P(\overline{X}=4) = \frac{32}{125} \quad \dots \text{㉠}$$

이다.

이때, 주어진 시행을 1번 하여 얻은 동전 1개를 던져 나온 수를 확률변수 X 라 하면 X 로 가능한 값은 1 또는 6이다.

$X=1$ 인 경우는

주머니에서 1이 적힌 카드를 2장 뽑는 경우

또는

주머니에서 1, 6이 적힌 카드를 한 장씩 뽑고,

동전을 던져 1이 나온 경우

로 가능하다. 따라서

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_2}{{}_{n+2}C_2} + \frac{{}_2C_1 \times {}_nC_1}{{}_{n+2}C_2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{n+2}$$

이고, 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=6) = 1 - P(X=1) = \frac{n}{n+2}$$

이다.

즉, 5개의 동전 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 를 던질 때,

$\overline{X}=3$ 인 경우는 1이 나온 동전이 3개, 6이 나온 동전이 2개,

$\overline{X}=4$ 인 경우는 1이 나온 동전이 2개, 6이 나온 동전이 3개

이어야 하므로

$$P(X=1)=p, \quad P(X=6)=q$$

라 하면

$$P(\overline{X}=3) = {}_5C_3 \times p^3 \times q^2, \quad P(\overline{X}=4) = {}_5C_2 \times p^2 \times q^3$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\text{㉠} \Rightarrow {}_5C_3 \times p^3 \times q^2 + {}_5C_2 \times p^2 \times q^3 = \frac{32}{125}$$

$$\Rightarrow (pq)^2 \times (p+q) = \frac{16}{625}$$

$$\Rightarrow pq = \frac{4}{25} \quad (\because p+q=1)$$

$$\Rightarrow (2n-1)(n-8)=0, \quad n=8$$

임을 알 수 있다.

풀이

(나)에서

$$\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = \log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

의 값이 4보다 작은 음이 아닌 정수이므로

$$\text{가능한 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{의 값은 } 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \quad (n=1, 2, 3, 4)$$

임을 알 수 있다. 이때,

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_5}{a_1} = 32 \quad (\because (가))$$

이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{b_n}$ 이라 하면

$$0 \leq b_n \leq 3 \quad \text{이고} \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 5$$

이다. 따라서 위의 조건을 만족시키는 순서쌍 (b_1, b_2, b_3, b_4) 의 개수는

$$\text{음이 아닌 정수 } b_n \text{에 대하여 } b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 5$$

를 만족시키는 경우의 수에서 네 값 b_1, b_2, b_3, b_4 가

$$(4, 1, 0, 0) \text{ 또는 } (5, 0, 0, 0)$$

인 경우의 수를 빼서 구할 수 있으므로 이때의 경우의 수는

$${}_4H_5 - \left(\frac{4!}{2!} + 4 \right) = 40$$

이다. 한편, (가)에 의하여

$$\text{가능한 } a_1 \text{의 값은 } 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

이므로

$$(\text{구하는 경우의 수}) = 6 \times 40 = 240$$

이다.

풀이

주어진 시행을 7200번 반복하여 4를 기록한 횟수를 확률변수 X 라 하면

$$X \text{는 이항분포 } B\left(7200, \frac{1}{3}\right) \text{을 따름}$$

$$\Rightarrow X \text{는 정규분포 } N(2400, 40^2) \text{을 따름} \dots \textcircled{7}$$

을 알 수 있다.

이때

기록한 모든 수의 곱이 1 이상

$$\Rightarrow 4^X \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7200-X} \geq 1$$

$$\Rightarrow 2^{3X-7200} \geq 1$$

$$\Rightarrow X \geq 2400$$

이고,

기록한 모든 수의 합이 12350 이하

$$\Rightarrow 4X + \frac{1}{2} \times (7200 - X) \leq 12350$$

$$\Rightarrow X \leq 2500$$

이므로

$$\begin{aligned} (\text{구하는 확률}) &= \frac{P(2400 \leq X \leq 2500)}{P(X \geq 2400)} \\ &= \frac{P\left(0 \leq Z \leq \frac{2500-2400}{40}\right)}{P(Z \geq 0)} \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= 2 \times P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= \frac{49}{50} \end{aligned}$$

이다.

$$\therefore p=50, q=49 \Rightarrow p+q=99$$

23

③

풀이

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\sin 2x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t + \pi)} \quad (\because 2x - \pi = t \text{로 치환}) \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \\ &= -1\end{aligned}$$

24

②

풀이

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} e^{\frac{n^2 - k^2}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} e^{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \int_0^1 x e^{1 - x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{1 - x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{e - 1}{2}\end{aligned}$$

25

①

풀이

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n(n^2 + a - \sqrt{n^4 + n^2 + n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(n^2 + a + \sqrt{n^4 + n^2 + n})}{n(n^4 + 2an^2 + a^2 - (n^4 + n^2 + n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(n^2 + a + \sqrt{n^4 + n^2 + n})}{n((2a - 1)n^2 - n + a^2)}\end{aligned}$$

이고, 이 값이 -3 으로 수렴하므로

$$2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b\left(n^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{n^4 + n^2 + n}\right)}{-n^2 + \frac{1}{4}n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b\left(1 + \frac{1}{2n^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)}{-1 + \frac{1}{4n}} \\ &= -2b\end{aligned}$$

이고, 이 값이 -3 이므로 $b = \frac{3}{2}$ 이다.

$$\therefore a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

26

③

풀이

$a \leq t \leq 2a$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $x = t$ 를 포함하고 x 축과 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sec^2 t}{\tan t}$$

이다. 따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_a^{2a} \frac{\sec^2 t}{\tan t} dt = \left[\ln(\tan t) \right]_a^{2a} = \ln\left(\frac{\tan 2a}{\tan a}\right)$$

이다. 이 값이 $2\ln 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{\tan 2a}{\tan a} = 4 &\Rightarrow \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2}{1 - \tan^2 a} = 4 \\ &\Rightarrow \tan^2 a = \frac{1}{2}, \tan a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because 0 < a < \frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다.

27

①

풀이

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = -4\sqrt{2}xe^{\frac{1}{2}-x^2} - a$$

이고, 주어진 조건을 만족시키기 위해서는

$x = k$ 에서 함수 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌는 실수 k 가 2개 이상 존재해야 함 ... ㉠

을 알 수 있다.

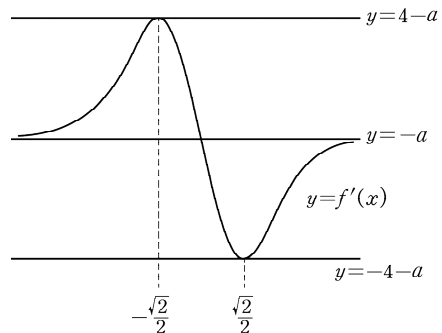
이때

$$\begin{aligned}f''(x) &= -4\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}-x^2} + 8\sqrt{2}x^2e^{\frac{1}{2}-x^2} \\ &= 8\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

이므로 함수 $y = f'(x)$ 는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 각각 최솟값

$-4 - a$, 최댓값 $4 - a$ 를 갖고, 직선 $y = -a$ 를 점근선으로 하는 함수이다.

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 ㉠을 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$\begin{aligned}-a < 0 < 4 - a \quad \text{또는} \quad -4 - a < 0 < -a \\ \Rightarrow 0 < a < 4 \quad \text{또는} \quad -4 < a < 0\end{aligned}$$

이므로

(조건을 만족시키는 모든 정수 a 의 개수) = 6

이다.

풀이

주어진 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이므로

$$f(x) = \frac{f(g(x))}{(g(x))^2}$$

이다. 이때 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(g(x))}{(g(x))^2} = -\infty$$

가 되려면

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

이어야 한다. 따라서 조건에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

이다. 즉, 실수 a 에 대하여

$$f(x) = x(x+1)(x+a) = x^3 + (a+1)x^2 + ax \quad (\because f(-1)=0)$$

로 놓을 수 있고,

$$f(x) = \frac{f(g(x))}{(g(x))^2} = g(x) + a + 1 + \frac{a}{g(x)}$$

이므로 $h(x) = x + a + 1 + \frac{a}{x}$ 라 하면

$$\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) = h(g(x)) \quad \dots \textcircled{7}$$

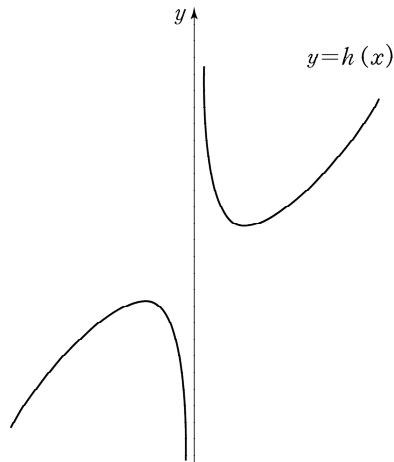
이다. 이때,

$$h'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2}$$

이므로 a 의 부호에 따라 경우를 나누어 보자.

(i) $a > 0$ 인 경우

함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



모든 실수 x 에 대하여 $g(x) > 0$ 또는 $g(x) < 0$

인데, 이 경우에서

함수 $h(g(x))$ 의 치역이 실수 전체의 집합이 될 수 없음

을 알 수 있다. 이때, 함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이므로 $\textcircled{7}$ 에 모순이다.

(ii) $a = 0$ 인 경우

$$\textcircled{7} \Rightarrow g(x) = f(x) - 1$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ 인 조건에 모순이다.

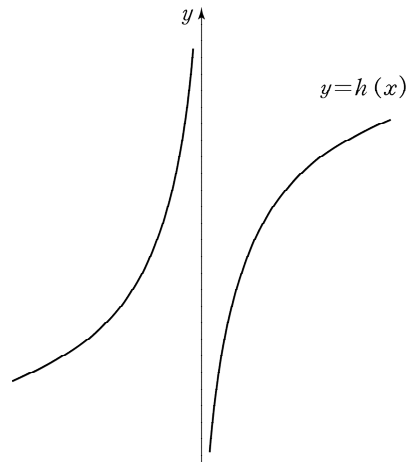
(iii) $a < 0$ 인 경우

함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같고,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(g(x)) = -\infty$$

$$\Rightarrow \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } g(x) > 0 \quad \dots \textcircled{8}$$

임을 알 수 있다.



한편, $\textcircled{7}$ 의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = \left(1 - \frac{a}{(g(x))^2}\right) \times g'(x)$$

이고, 위 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$f'(0) = \left(1 - \frac{a}{(g(0))^2}\right) \times g'(0)$$

이다. 이때,

$$f(0) = \frac{f(g(0))}{(g(0))^2} = 0 \Rightarrow g(0) = -a \quad (\because \textcircled{8})$$

이므로

$$f'(0) = \left(1 - \frac{a}{(g(0))^2}\right) \times g'(0) \Rightarrow f'(0) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times g'(0)$$

이다. 따라서

$$f'(0) + g'(0) = -\frac{10}{3}, \quad f'(0) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times g'(0)$$

$$\Rightarrow \frac{2a-1}{a-1} \times f'(0) = -\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow (6a-5)(a+2) = 0 \quad (\because f'(0) = a)$$

$$\Rightarrow a = -2 \quad (\because a < 0)$$

이다.

$$\therefore f(x) = x(x+1)(x-2) \Rightarrow f(3) = 12$$

풀이

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 수렴} \Rightarrow -1 < r < 1$$

이고,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + |a_n| - 1) = -1 \quad (\because \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0)$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴함을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= -1 \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= -3 \quad (\because \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2) \\ \Rightarrow \frac{a_1}{1-r} &= -3 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이때,

$$\textcircled{1} \Rightarrow a_1 = 3(r-1) < 0 \Rightarrow b_1 = a_1 - 1$$

이고,

$$a_n < 0 \text{인 경우, } a_n = \sum_{k=1}^n b_k + 1$$

$$a_n > 0 \text{인 경우, } 3a_n = \sum_{k=1}^n b_k + 1$$

이므로 r 의 부호를 기준으로 경우를 나누어 보자.

(i) $0 < r < 1$ 인 경우

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < 0$ 이므로

$$\text{모든 자연수 } n \text{에 대하여 } \sum_{k=1}^n b_k = a_n - 1$$

이다. 따라서

$$b_{n+1} = a_{n+1} - a_n > 0$$

이고, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} > 0$ 이므로 이 값은 $\frac{5}{4}a_1$ 이 될 수 없다.

(ii) $-1 < r < 0$ 인 경우

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1} < 0, \quad a_{2n} > 0$$

이므로

$$\begin{aligned} 3a_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} b_k + 1, \quad a_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} b_k + 1 \\ \Rightarrow b_{2n+1} &= a_{2n+1} - 3a_{2n} = (r-3)a_{2n} \end{aligned}$$

이다.

즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} = (r-3) \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{(r-3)a_2}{1-r^2}$$

이고, 이 값이 $\frac{5}{4}a_1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{r(r-3)a_1}{1-r^2} &= \frac{5}{4}a_1 \Rightarrow (3r-5)(3r+1)=0 \quad (\because a_1 \neq 0) \\ \Rightarrow r &= -\frac{1}{3} \quad (\because -1 < r < 0) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\textcircled{1} \Rightarrow a_1 = -4 \Rightarrow (b_1)^2 = (a_1 - 1)^2 = 25$$

이다.

풀이

$f(0)=0$ 이므로 주어진 식에서

$$f(0) = (f'(0))^2 \left(\frac{3}{4}(f'(0))^2 + \frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

이고, 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(f'(x))^3 f''(x) + 3f'(x)f''(x) \\ \Rightarrow f'(x) \times \{3(f'(x))^2 f''(x) + 3f''(x) - 1\} &= 0 \end{aligned}$$

이다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또는

$$1 = 3(f'(x))^2 f''(x) + 3f''(x)$$

이다. 위 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$x = (f'(x))^3 + 3f'(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 상수}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

이므로 $\textcircled{2}$ 에서 함수 $f'(x)$ 의 그래프는 함수 $y = x^3 + 3x + C$ 의 역함수의 그래프의 일부이다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) \text{가 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 가짐} \\ \Rightarrow \text{함수 } f'(x) \text{가 실수 전체의 집합에서 미분가능함} \end{aligned}$$

인데,

$$\textcircled{1} \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위에서 } f''(x) = 0$$

$$\textcircled{2} \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위에서 } f''(x) > 0$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1}$ 또는 $\textcircled{2}$ 중 오직 한 경우만을 만족시켜야 한다.

따라서 조건에서 $f(0) < f(1)$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{2}$ 을 만족시키고,

$$C = 0 \quad (\because f'(0) = 0)$$

$$\Rightarrow \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f'(x^3 + 3x) = x$$

이다. 즉, 주어진 식에 의하여

$$\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x^3 + 3x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2$$

이고,

$$x^3 + 3x = 4 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0, \quad x = 1$$

에서 $f(4) = \frac{9}{4}$ 임을 알 수 있다. 한편

함수 $x^3 + 3x$ 의 역함수의 그래프가 원점에 대하여 대칭

$\Rightarrow$ 함수 $f'(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭

$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭

임을 알 수 있으므로

$$\begin{aligned} &\int_{-4}^4 f(x) dx \\ &= 2 \times \int_0^4 f(x) dx \quad (\because \text{대칭성}) \\ &= 2 \left\{ \left[xf(x) \right]_0^4 - \int_0^4 xf'(x) dx \right\} \quad (\because \text{부분적분}) \\ &= 18 - 6 \int_0^1 t(t^3 + 3t)(t^2 + 1) dt \quad (\because x = t^3 + 3t \text{로 치환}) \\ &= 18 - 6 \left[\frac{1}{7}t^7 + \frac{4}{5}t^5 + t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{222}{35} \end{aligned}$$

이다.

$$\therefore p = 35, \quad q = 222 \Rightarrow p + q = 257$$

△시대인재 BOOKS

VERADI

CONTENTS

1%의 풀이 로직을 당신의 것으로



카카오톡 채널
@veradi



인스타그램
@veradi_contents